Devoir Maison

Pour le 7 novembre 2022

Exercice 1

(*Adapté de Ecricome ECS 2016*)

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$. On note pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. Pour $n \geqslant 1$ on note $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$.
   (b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
   (c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ, appelé **constante d'Euler**.
2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?
4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.
   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :
   $$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$
   puis que :
   $$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$
6. Démontrer alors que :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$

Exercice 2

(*adapté de Banque PT 2022*)

Partie I

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Soit $u = (1, -2, 1)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ que l'on notera P puis la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, on notera D cette matrice.
4. Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Partie II — Jouons au golf

Un joueur de golf, Anthony, s'entraîne sur le premier trou du parcours.

Il réussit le par sur ce trou s'il rentre la balle dans le trou en exactement 4 coups.

Il est au-dessous du par s'il rentre la balle dans le trou en 3 coups maximum et il est au-dessus du par dans les autres cas.

Anthony a constatée que : pour tout entier naturel n,

• si lors du n-ème entraînement, il est au-dessous du par, alors lors de l'entraînement suivant, il reste au-dessous du par avec une probabilité de $\frac{5}{8}$, il réussit le par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et il est au-dessus du par avec la probabilité de $\frac{1}{8}$.

• si lors du n-ème entraînement, il réussit le par, alors lors de l'entraînement suivant, il est au-dessous du par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, il réussit le par avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et il est au-dessus du par avec la probabilité de $\frac{1}{4}$.

• si lors du n-ème entraînement, il est au-dessus du par, alors lors de l'entraînement suivant, il est au-dessous du par avec la probabilité de $\frac{1}{8}$, il réussit le par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et il reste au-dessus du par avec une probabilité de $\frac{5}{8}$.

On note A_n, B_n et C_n les événements « Anthony est au-dessous du par lors du n-ème l'entraînement », « Anthony réussit le par lors du n-ème l'entraînement » et « Anthony est au-dessus du par lors du n-ème l'entraînement » et a_n, b_n et c_n leur probabilité respective.

Lors du dernier échauffement, considéré comme l'entraînement numéro 0, Anthony réussit le par.

On a donc $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

1. Donner les valeurs de a_1, b_1 et c_1.
2. Donner les valeurs des probabilités conditionnelles : $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$, $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})$ ainsi que $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$. Chaque valeur devra être justifiée par une phrase, éventuellement extraite de l'énoncé.
3. Établir pour tout entier naturel n que $a_{n+1} = \frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{8}c_n$.
4. Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Aucune justification n'est demandée.

Pour tout entier naturel n, on pose $G_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

5. Donner une relation entre G_{n+1}, G_n et la matrice A de la première partie.
6. Donner sans démonstration la relation entre G_n, G_0, A et n.
7. En déduire les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
8. Que valent $\lim_{n\to+\infty} a_n$, $\lim_{n\to+\infty} b_n$ et $\lim_{n\to+\infty} c_n$?
   Interpréter le résultat.

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

1. (a) On a : $\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$ et $\boxed{\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2)}$.

   (b) Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\
&= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}}$.

> **Équivalent**
> Une suite (ou une fonction) est toujours équivalente au premier terme non-nul de son D.L.

   (c) De la question précédente on tire $|w_{n+1} - w_n| \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2n^2}$.

   La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (car$2 > 1$) donc, par linéarité, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n^2}$ converge.

   Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} |w_{n+1} - w_n|$ converge.

   Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} (w_{n+1} - w_n)$ converge absolument et donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} (w_{n+1} - w_n) \text{ converge.}}$

   Pour $N \in \mathbb{N}$ on a $w_k = w_1 + \sum_{k=1}^{N-1} w_{k+1} - w_k$.

   On vient de montrer que la suite $\left(w_1 + \sum_{k=1}^{n-1} w_{k+1} - w_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers $w_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} w_{k+1} - w_k$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$

2. La fonction φ est un quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas et est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$

   De plus, pour tout réel $t > 0$, on a :

$$\varphi'(t) = \frac{\frac{1}{t} \cdot t - \ln(t) \cdot 1}{t^2} = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}$$

   Donc $\varphi'(t) > 0$ si et seulement $\ln(t) < 1$ i.e. si et seulement si $t < \mathrm{e}^1$

   Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est strictement croissante sur }]0, \mathrm{e}] \text{ et est strictement décroissante sur } [\mathrm{e}, +\infty[.}$

   Par croissances comparées, on a : $\boxed{\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0}$.

   Par produit, on a : $\boxed{\lim_{t\to 0} \varphi(t) = -\infty}$.

   On en déduit le tableau de variation suivant

x	0		e^1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

3. Soit $n \geqslant 2$. Ainsi $2n+3 > 2n+2 > 2n+1 > 2n \geqslant 4 > 3 > \mathrm{e}$.
La suite $|u_n|)_{n\geqslant 3}$ est ainsi décroissante. Par croissances comparées elle converge vers 0.

Décroissance

On travaille ainsi sur un ensemble où φ est décroissante

Enfin, pour $n \geqslant 3$ on a $u_n u_{n+1} = -\dfrac{ln(n)ln(n+1)}{n(n+1)} < 0$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} u_n$ est donc une série alternée, elle converge donc et, par conséquent, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge.}}$

Pour tout $n \geqslant 3$, on a $|u_n| = \dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$. Or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Ainsi par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ diverge.

Finalement $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ n'est pas absolument convergente.}}$

Semi-convergente

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente mais pas absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

4. (a) Soit $n \geqslant 3$. Alors : $n+1 > n \geqslant 3 > \mathrm{e}$. La fonction φ est strictement décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$ donc :

$$\forall t \in [n, n+1],\ \varphi(n+1) \leqslant \varphi(t)$$

Par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_n^{n+1} \varphi(n+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t}$$

(b) Soit $n \geqslant 3$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n+1)]^2}{2}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}\right) \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{[\ln(n+1)]^2 - [\ln(n)]^2}{2} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \left[\frac{[\ln(t)]^2}{2}\right]_n^{n+1} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\ln(t)\mathrm{d}t = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t \\
&\leqslant 0
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante.}}$

Soit $n \geqslant 3$. On a, de manière similaire à la question 4.(a),

$$\forall k \in [\![3, n]\!], \qquad \forall t \in [k, k+1],\ \varphi(t) \leqslant \varphi(k)$$

Ainsi

$$\forall k \in [\![3, n]\!], \qquad \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(k)}{k}$$

D'où, d'après la relation de Chasles,

$$\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=3}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=3}^{n-1}\frac{\ln(k)}{k}$$

C'est-à-dire

$$\frac{[\ln(n)]^2}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(n)}{n}$$

On en déduit que

$$\frac{\ln(2)-[\ln(3)]^2}{2} + \frac{\ln(n)}{n} \leqslant v_n$$

Comme $n \geqslant 3 > \mathrm{e}$ on a $\dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant 0$ et donc

$$\frac{[\ln(n)]^2}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(n)}{n}$$

La suite (v_n) est ainsi minorée par $\dfrac{[\ln(n)]^2}{2} - \dfrac{[\ln(3)]^2}{2}$

(v_n) est une suite décroissante et minorée, on en conclut donc que : $\boxed{(v_n)_{n\geqslant 3} \text{ est convergente.}}$

> **Minoration**
> Pour dire qu'une suite est minorée il faut la minorer par une**constante**, le minorant ne doit pas dépendre de n.

5. Soit $n \geqslant 1$. En séparant les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs on a

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln(k)}{k} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i}\frac{\ln(2i)}{2i} + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{2i+1}\frac{\ln(2i+1)}{2i+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$$

et

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{\ln(k)}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \left[\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k}\right] \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}}$$

Soit $n \geqslant 1$. On déduit de l'égalité qui précède que :

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2)+\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \left[v_n + \frac{[\ln(n)]^2}{2}\right] - \left[v_{2n} + \frac{[\ln(2n)]^2}{2}\right] \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{[\ln(n)]^2 - [\ln(2)+\ln(n)]^2}{2} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{[-\ln(2)]\,[2\ln(n)-\ln(2)]}{2}
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)}$$

6. On sait que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} v_{2n} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} w_n = \gamma$$

Alors :

$$S_{2n} = \ln(2)w_n - \frac{[\ln(2)]^2}{2} + (v_n - v_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma\ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2} + 0$$

Finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma\ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 2

Partie I

1. On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rang}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \mathrm{Rang}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right) && \begin{subarray}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{subarray} \\
&= \mathrm{Rang}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right) && L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u,v,w)$ est inversible, $\boxed{\mathcal{B} = (u,v,w) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3}$.

2. On a $P = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ On sait que $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^{-1} = P^{-1}$.

   On va inverser P par la méthode de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{array}$$

   Ainsi

$$\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

3. D'après la formule de changement de bases, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$, c'est-à-dire $D = P^{-1}AP$.

   Après calcul on obtient

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

4. Il peut être tentant d'effectuer une récurrence ici mais la formule de changement de base nous donne le résultat immédiatement. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$A^n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f^n) = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = PD^nP^{-1}$$

   On a donc bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}}$$

5. D étant une matrice diagonale on sait que, pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

   Puis, en exploitant la formule de la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n}{3} + 2^{n-1} + \frac{1}{6} & \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3} & \frac{4^n}{3} - 2^{n-1} + \frac{1}{6} \\ \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3} & \frac{4^n}{3} + \frac{2}{3} & \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{4^n}{3} - 2^{n-1} + \frac{1}{6} & \frac{4^n}{3} - \frac{1}{3} & \frac{4^n}{3} + 2^{n-1} + \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \times 4^n + 3 \times 2^n + 1 & 2 \times 4^n - 2 & 2 \times 4^n - 3 \times 2^n + 1 \\ 2 \times 4^n - 2 & 2 \times 4^n + 4 & 2 \times 4^n - 2 \\ 2 \times 4^n - 3 \times 2^n + 1 & 2 \times 4^n - 2 & 2 \times 4^n + 3 \times 2^n + 1 \end{pmatrix}}$$

Partie II — Jouons au golf

1. On sait que Anthony a réussi le par au coup 0, ainsi, d'après l'énoncé, à l'entrainement 1 il est au-dessous du par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, il réussit le par avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et il est au-dessus du par avec la probabilité de $\frac{1}{4}$.

   C'est-à-dire $\boxed{a_1 = \frac{1}{4},\ b_1 = \frac{1}{2} \text{ et } c_1 = \frac{1}{4}}$.

2. D'après l'énoncé

   • si lors du n-ème entraînement, il est au-dessous du par, alors lors de l'entraînement suivant, il reste au-dessous du par avec une probabilité de $\frac{5}{8}$, ainsi $\boxed{\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{5}{8}}$.

   • si lors du n-ème entraînement, il réussit le par, alors lors de l'entraînement suivant, il est au-dessous du par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, ainsi $\boxed{\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}}$.

   • si lors du n-ème entraînement, il est au-dessus du par, alors lors de l'entraînement suivant, il est au-dessous du par avec la probabilité de $\frac{1}{8}$, ainsi $\boxed{\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{8}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) nous assure que

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\,\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\,\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\,\mathbb{P}(C_n)$$

   C'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} = \frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{8}c_n}$$

4. De manière similaire on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad c_{n+1} = \frac{1}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{5}{8}c_n}$$

5. D'après les questions précédentes on a

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= \begin{pmatrix} \frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{8}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{5}{8}c_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}AG_n \end{aligned}$$

   Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad G_{n+1} = \frac{1}{4}AG_n}$$

6. On a alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad G_n = \frac{1}{4^n}A^nG_0}$$

7. D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned}
G_n &= \frac{1}{4^n} A^n G_0 \\
&= \frac{1}{4^n}\frac{1}{6}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\times 4^n + 3\times 2^n + 1 & 2\times 4^n - 2 & 2\times 4^n - 3\times 2^n + 1 \\ 2\times 4^n - 2 & 2\times 4^n + 4 & 2\times 4^n - 2 \\ 2\times 4^n - 3\times 2^n + 1 & 2\times 4^n - 2 & 2\times 4^n + 3\times 2^n + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6\times 4^n}\begin{pmatrix} 2\times 4^n - 2 \\ 2\times 4^n + 4 \\ 2\times 4^n - 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} a_n &= \dfrac{4^n - 1}{3\times 4^n} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3\times 4^n} \\ b_n &= \dfrac{4^n + 2}{3\times 4^n} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3\times 4^n} \\ c_n &= \dfrac{4^n - 1}{3\times 4^n} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3\times 4^n} \end{cases}}$$

8. D'après la question précédente

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}}$$

On peut donc estimer que, quand n devient très grand, Anthony a autant de chances d'être sous, sur ou au par. Cela pose un peu la question de l'efficacité de son entrainement.